Übungen

Abgabetermin: Freitag 14.5. 10Uhr, Briefkästen 41, 42, 43 und 46
THEMEN: Geometrische Wahrscheinlichkeiten, Zufallsvariablen, Ungleichungen für Wahrscheinlichkeiten und Erwartungswerte

Aufgabe 13 (7 Punkte)

a) Auf dem Intervall $[0, 2\pi)$ wähle man zufällig drei Punkte X, Y, Z und identifiziere diese mit den Punkten e^{iX}, e^{iY} und e^{iZ} auf dem Einheitskreis. Mit welcher Wahrscheinlichkeit handelt es sich bei der durch Verbinden der Punkte entstandenen Figur um ein Dreieck, das den Kreismittelpunkt enhält? **Hinweis:** Bestimmen Sie die Menge A der Punkte in $[0, 2\pi)^3$, die zu einem solchen Dreieck führen. Dann gilt $P(A) = \lambda\!\!\!\lambda^3(A)/\lambda\!\!\!\lambda^3([0, 2\pi)^3)$.

b) Nun wähle man von den Ecken eines regelmäßigen n-Ecks (n gerade) zufällig drei (nicht notwendigerweise verschiedene) Ecken aus. Mit welcher Wahrscheinlichkeit handelt es sich bei der durch Verbinden der Punkte entstandenen Figur um ein Dreieck, das den Mittelpunkt des n-Ecks enthält?

Aufgabe 14 (5 Punkte)

a) $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ sei Lebesgue-integrierbar und stetig in $x_0 \in \mathbb{R}$. Zeigen Sie, dass

$$F : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \ \ F(x) = \int_{(-\infty, x]} f(t)\lambda\!\!\!\lambda(dt)$$

in x_0 differenzierbar ist und $F'(x_0) = f(x_0)$ gilt.

b) Es sei X eine Zufallsvariable mit der integrierbaren Lebesgue-Dichte

$$f(x) = \frac{1}{\pi}\frac{1}{1+x^2}.$$

Bestimmen Sie die Lebesgue-Dichte von $Y = aX + b, a > 0, b \in \mathbb{R}$.

c) Bestimmen Sie den Erwartungswert von X, sofern dieser existiert.

Aufgabe 15 (4 Punkte)
Es seien $X \in \mathfrak{L}_p$ und $Y \in \mathfrak{L}_q$ $(p, q \geq 1)$. Beweisen Sie die Hölder-Ungleichung

$$E|X \cdot Y| \leq (E|X|^p)^{\frac{1}{p}} (E|Y|^q)^{\frac{1}{q}} \ \text{ für alle } 1 < p, q < \infty \text{ mit } \frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$$

mit Hilfe der Ungleichung

$$u^\alpha v^{1-\alpha} \leq \alpha u + (1-\alpha)v \ \text{ für alle } u, v \in \mathbb{R} \text{ und } 0 < \alpha < 1.$$

Bitte wenden!

Aufgabe 16 (4 Punkte)
Sei X eine quadratisch integrierbare Zufallsgröße und $c > 0$. Zeigen Sie:

a) $P(X - EX \geq c) \leq \frac{VarX + t^2}{(c+t)^2}$ für alle $t \geq 0$.

b) $P(X - EX \geq c) \leq \frac{VarX}{c^2 + VarX}$.